LA VERITÀ NON SI PUÒ INCAPSULARE: LIMITI E FRONTIERE NELLA E DELLA MATEMATICA

This article addresses the topic of "limits" both as a formal content of mathematics and, on a meta-theoretical level, as a cognitive boundary inherent in mathematics.

di
JUDITH POVILUS

Sophia III (2011-2) 175-182

In questo breve intervento vorrei toccare il tema del limite nella matematica, sia come contenuto formale (il concetto formale di limite come oggetto di studio della matematica, considerato in modo particolare qui nella sua valenza epistemologica), sia su livello meta-teorico (il limite conoscitivo inerente alla matematica e ad ogni sistema formale).
Ci si potrebbe domandare, prima di iniziare, quanto una definizione formale nata in campo matematico abbia qualcosa da offrire ad una discussione interdisciplinare come la nostra oggi. Secondo il noto logico Willard Quine, il limite è stato definito dai matematici con un processo analogo a quello utilizzato da una persona che, con spirito filosofico, cerca di esprimere o analizzare un'idea qualsiasi non ancora formulata in modo adeguato. *Non si pretende di trovare un sinonimo, ma fissandoci su quelle proprietà particolari dell'espressione che sono a noi utili e basilari, inventiamo un modo per esplicarle in termini chiari ed adeguati al nostro scopo*.
Per il matematico è importante riuscire a spiegare le sue idee basilari in un modo chiaro e non equivoco, ed è proprio questa chiarezza che egli può offrire alle altre scienze, che a loro volta dovranno riempire con contenuti ricchi e tangibili la forma individuata e precisata.

1. Il concetto formale di limite

Come è noto il concetto di limite è – dall'antichità – l'altra faccia dell'*apeiron*, dell'illimitato. Aristotele sosteneva che ciò che non ha limite non è rappresentabile esaurientemente nel nostro pensiero, ed è perciò inconoscibile. Nella sua nota distinzione fra infinito potenziale ed infinito attuale, egli ammette però la possibilità di pensare ad un processo infinito, ed è proprio ciò che ha permesso alla matematica, secoli dopo, di dare una precisa definizione di limite. Notiamo infine – e con ciò si chiude il cerchio – come l'uso di tale precisazione matematica del concetto di limite abbia permesso una definizione dei vari gradi dell'infinito attuale (ciò che Aristotele negava!).
La distinzione essenziale da tenere presente perciò – nel discorso sull'infinito ma anche nel discorso sul limite – è quella fra un processo dinamico ed un ente statico, determinato, sia esso anche un oggetto del pensiero. Secondo Aristotele è permesso pensare ad un processo infinito – ad esempio al processo di contare – (l'infinito potenziale), ma non ad una successione infinita compiuta, ad esempio la successione infinita di tutti i numeri.
Vi è un momento significativo nella storia della riflessione occidentale, quando la dinamica del tipo di processo indicato da Aristotele per descrivere l'infinito potenziale, cioè un processo infinito ricorsivo, fu "oggettivizzata" da parte della matematica e incorporata nella definizione di "limite". Tale oggettivizzazione avvenne prima in modo euristico, con la messa a punto di una tecnica particolare (il calcolo infinitesimale), e in seguito in modo concettuale, attraverso una definizione precisa e logicamente coerente. Il nuovo concetto di limite divenne con ciò parte integrante e legittima di una visione più esatta del mondo. Il periodo a cui mi riferisco è quello della nascita della scienza moderna, legata in modo forte alla nascita del calcolo infinitesimale, che è un metodo di calcolo matematico applicabile a fenomeni dinamici, atto ad esempio a determinare il percorso di oggetti in movimento.

Sviluppato contemporaneamente e in modo indipendente da Newton e Leibniz, il calcolo viene oggi considerato la più importante acquisizione della matematica dopo la geometria euclidea. Indubbiamente il suo impiego ha segnato in modo forte lo sviluppo della tecnologia moderna.
Come abbiamo accennato, lo strumento matematico proposto da Leibniz e Newton incorpora in modo euristico ciò che diventò in seguito il concetto preciso e basilare di limite. Il calcolo era dunque un metodo, una tecnica o "trucco pratico", che permetteva di calcolare l'area compresa tra curve regolari o irregolari, considerando "somme" delle aree di strisce sempre più fini e sempre più numerose che si avvicinavano sempre più ad un "limite", ad un numero preciso (figura 1). In essenza non era che una messa a punto – nel quadro delle acquisizioni nuove della geometria analitica cartesiana – di una comprensione antica. Pensiamo per esempio ad Archimede, con il suo metodo di esaustione per calcolare l'area di un cerchio. Si trattava dell'iscrizione interna alla circonferenza di poligoni con un numero sempre più grande di lati (figura 2): la circonferenza è – secondo il linguaggio successivamente maturato – un "limite" che «comprende la successione illimitata dei poligoni pur non costituendone un termine effettivo e pur non uscendo mai dal finito». Come spiega Zellini:

> «Il limite non è un termine della successione (delle somme) e non è perciò una semplice approssimazione […], esso è raggiunto rinunciando all'analisi indefinita della successione che lo precede e ponendosi in un punto di riferimento esterno che è invisibile a chi si soffermi alla pur corretta constatazione della sua indefinita lontananza e irraggiungibilità […]»[1].

Comprendere e definire con precisione il concetto di limite matematico implicava dunque compiere un salto conoscitivo ad una nuova prospettiva, che permetteva di oggettivizzare ciò che era prima un processo dinamico senza fine.
Il metodo del calcolo infinitesimale, introdotto da Leibniz e Newton, si è dimostrato subito molto utile in quanto funzionava assai bene, ma in realtà era basato su un fondamento insicuro, quello degli infinitesimi, ossia dell'infinitamente piccolo; anzi sul fondamento ancora più sospetto del rapporto fra due infinitesimi, ambedue variabili. Infatti, per Leibniz gli infinitesimi sono considerati "finzioni" utili, e per Newton – che li chiamava "flussioni" – erano quantità "evanescenti". Nel metodo da loro proposto si trattava, dunque, di trovare il rapporto tra due quantità variabili e insieme "finte" o "evanescenti"!
È comprensibile che tale metodo – anche se funzionante – non fu facilmente accettato dai teorici dell'epoca. Anzi vi fu all'inizio molto resistenza. Ancora nel 1831, a proposito del metodo di cui stiamo parlando, il grande matematico Gauss – sulla scia di Aristotele – lamentava: «protesto contro l'uso di una grandezza infinita come qualcosa di completo, uso che non venne mai ammesso nella matematica. L'infinito è soltanto un modo di dire»[2].

1) P. Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano 1996, pp. 34-35.
2) L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino 1947, pp. 174-175.

Fu necessario allora un serio e profondo ripensamento, seguito da una rigorosa messa a punto in termini chiari e indiscutibili del processo che stava alla base del nuovo metodo, con la conseguente elaborazione e chiarificazione del concetto non facile ma importantissimo del limite. Vi lavorarono in molti, ma dobbiamo a Cauchy (anni 1820) e in seguito a Weierstrass i risultati oggi diventati canonici. Il concetto centrale di limite, nella formulazione di Cauchy, prende come basilare l'idea di una quantità variabile che si avvicina a zero. Trasforma l'immagine geometrica di una successione convergente di figure che si avvicinano sempre più ad un'altra (cf. *supra* la descrizione di Archimede) in una precisa definizione aritmetica algebrica riguardante una successione convergente di cifre. Ha colto bene l'essenza di quanto avveniva Zellini dicendo: «pur conservando in sé l'idea di un processo e di una potenzialità illimitata il limite ha il potere di risolvere tale potenzialità in un'unità formale»[3]. Ed è proprio questo il punto cruciale e di grande interesse epistemologico.
Nella definizione matematica di limite è da sottolineare, inoltre, l'importante fattore della co-relazionalità. In realtà, ciò che viene puntualizzato è il comportamento del rapporto dinamico fra due enti variabili, ciascuno dei quali tendente a zero. Con ciò si mette in evidenza un'intuizione straordinaria e a mio avviso ancora poco presa in considerazione: quanto in fondo ciò che determina, che limita, sia riconducibile ad un sistema di relazioni. È un'intuizione da approfondire, con ripercussioni anche a livello ontologico sulla priorità di "relazione" sulla "sostanza", o meglio sulla loro mutua dipendenza[4].

2. Frontiere e limiti

Collegato al concetto di limite vi è quello di frontiera. Nell'idioma comune, limite e frontiera sono due termini sinonimi, anche se portano a volte sfumature diverse. In genere, la parola "frontiera" denota un limite di un determinato tipo, e nel suo senso primario suppone l'estensione nello spazio e/o nel tempo. Ad esempio, la frontiera di una nazione è il limite oltre il quale non si può passare senza uscirne. Dunque è ciò che demarca la differenza fra il "dentro" e il "fuori", pensato a mo' di uno strato infinitamente fine, e si collega ai concetti spaziali di contatto, divisione, e separazione.
In questo contesto dell'estensione nello spazio, nella branca della geometria detta "topologia"[5], troviamo un'importante definizione formale di "frontiera" basata su "insiemi" e "punti". Tecnicamente, la "frontiera dell'insieme S" viene definito come l'insieme di "punti di frontiera" di S, dove un "punto di frontiera" di S può essere pensato come un punto che non è né un "punto interno" né un "punto esterno". Il senso comune di "interno" ed "esterno" sarà sufficiente al lettore per intuire, senza entrare nei particolari, ciò che viene precisato nel linguaggio rigoroso della topologia con questi ultimi termini.

3) Zellini, cit., p. 41.
4) Cf. J. Povilus, *Laws of Thought and Patterns of Love*, in «Sophia», 1 (2009/2), p. 189.
5) La topologia "si occupa di quelle proprietà delle figure geometriche che restano invariate quando la figura viene piegata, stirata, compressa o deformata".

Comunque si può rilevare che, alle base delle definizioni topologiche, ci sono gli stessi strumenti utilizzati per definire il limite, anche se con modalità diverse. Anziché considerare limiti di successioni di numeri, vengono considerati i "punti limite" di successioni di punti. Considerando una variabile (il raggio di un disco intorno ad un punto) che tende a zero, si esamina la qualità dei punti interni al disco che va così rimpicciolendosi. Così ogni frontiera determinabile è, in fin dei conti, il risultato di un processo basato su limiti.

Va notato che, a motivo di alcune qualità paradossali del continuo, la definizione formale di frontiera, pervenuta dalla topologia e basata su "insiemi di punti", ammette dei casi "patologici" e contra-intuitivi[6]. Per questo motivo, un approccio alternativo nel quale la definizione di frontiera non parte da punti, ma da regioni aperte (approccio che porta ad una diversa definizione di frontiera), è forse più auspicabile e vicino alla realtà[7]. In ogni caso, sia che si parta dai singoli punti per definire le frontiere, sia che si definiscano le frontiere partendo da altri enti considerati più fondamentali, non si può prescindere dal considerare "limiti" di successioni, cioè successioni che "si avvicinano" a qualche cosa determinata.

Smith e Varzi, muovendo in una prospettiva realista, nella loro ontologia formale di frontiera illustrano una distinzione tra frontiere fisiche (dette *bona fide*), che corrispondono a qualche differenza qualitativa o ad una discontinuità spazio-temporale, e frontiere *fiat* o ideali (determinate dal pensiero, senza una discontinuità spazio-temporale o differenza qualitativa). Come esempio del primo tipo, si pensa alla frontiera fra la superficie del tavolo e il piatto che poggia su di esso, oppure fra il mio corpo e il mondo intorno. Esempi del secondo tipo includono quello già menzionato della linea di divisione fra due nazioni, oppure le frontiere "geometriche", ad esempio fra un disco e il resto del piano.

Si può osservare che, nel caso di una frontiera *fiat*, che divide due enti, non è determinato *a priori* se la frontiera fa parte del primo ente o del secondo. Lo decidiamo noi. Ad esempio, se una circonferenza è considerata come facente parte del disco che essa delimita, il disco è detto chiuso; se non ne fa parte, il disco è detto aperto. Analogamente, due punti possono delimitare un intervallo chiuso (se ne fanno parte) o aperto (figura 3). Si può notare ancora: dato che una frontiera *fiat* è "nello" spazio-tempo ma non occupa spazio-tempo, non occorre porre per forza la contrapposizione aperto-chiuso. In altre parole, non vige la legge del terzo escluso.

Comunque, in ambedue i casi (frontiera *bona fide* e frontiera *fiat*) emerge una proprietà fondamentale e significativa di ogni frontiera: esse sono ontologicamente parassitiche sugli enti che limitano; ossia non possono esistere, in quanto fron-

6) Si pensi ad esempio all'insieme dei punti della retta che corrispondono ai numeri razionali, la frontiera del quale è l'intera retta.

7) Cf. K. Menger, *Topology without Points*, in «Rice Institute Pamphlet», 27 (1940), pp. 80-107. Nella teoria del punto di Menger, i punti sono definiti come classi di certi enti con date relazioni fra loro. Cf. Anche C. Eschenbach, *A Mereotopological Definition of "Point"*, in C. Eschenbach – C. Habel – B. Smith (edd.), (1994), pp. 63-80; A. Tarski, *Foundations of the Geometry of Solids*, in *Logic, Semantics and Metamathematics*, trad. di J.H. Woodger, Oxford University Press, Oxford 1956.

tiere, isolate da essi[8]. Una frontiera è per definizione una frontiera "di" qualcosa oppure "fra" qualcosa e la sua negazione; costatazione che ci indica la natura fondamentalmente relazionale di ogni frontiera.

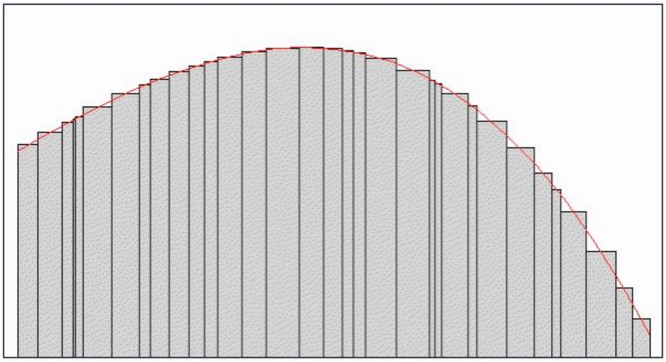
3. I limiti del pensiero

Abbiamo considerato sinora come i concetti di limite e di frontiera sono venuti chiarendosi nella matematica, fino a giungere a definizioni precise e formali. Ma non è insensato, nel contesto del nostro simposio, interrogarci anche sui limiti della matematica stessa.
Simone Weil afferma che il limite in matematica è «il punto in cui ci si scontra con un'impossibilità e occorre creare una nozione nuova». Aggiunge poi: «sono i punti di armonia, i punti di bellezza […]»; «è qualcosa che è costantemente oltrepassato, ma impone di rimando un'oscillazione compensatrice»[9].
Ciò che descrive così efficacemente la Weil, riguardo all'atto di incorporare il limite per oltrepassarlo, è una dinamica ricorrente che è parte integrante della stessa storia della matematica, nell'estendersi del suo campo operativo d'applicazione attraverso i secoli. Basti pensare alla progressiva evoluzione del concetto di numero, che dai soli numeri naturali (1,2,3…) si è esteso per inglobare anche quelli negativi, le frazioni o cosiddetti numeri razionali, i numeri irrazionali, quelli immaginari, ecc. È, questo, un estendersi che si può collegare anche, in qualche modo, alla dinamica di limite descritta all'inizio. Infatti, se il limite viene considerato "dal di dentro", come non facente parte del proprio dominio operativo, esso rappresenta il confine mai raggiungibile della propria determinatezza, della propria sfera di possibilità, confine che non è permesso oltrepassare. Tuttavia, se il processo di avvicinarsi al limite viene guardato dal di fuori o dal di sopra, esso stesso può diventare un nuovo oggetto di un livello trascendente. Ed ogni volta che si è – per un salto qualitativo – compreso (fatto proprio) un processo limitativo oggettivizzandolo, appare subito un altro limite apparentemente irraggiungibile, in un meta-processo che si direbbe a sua volta interminabile, "senza limiti".
Ritornando al nostro punto di partenza, e a titolo di esempio, ricordiamo come l'uso dell'infinito (o di ciò che è equivalente, gli infinitesimi) era rigorosamente proibito nella prassi matematica prima dell'Ottocento. Il concetto di infinito costituiva dunque esso stesso un limite per la disciplina, per il suo campo di attività. Successivamente, tale limite viene definito e assunto come nuovo "ente" (cf. l'*omega* di Cantor). Appropriatisi del limite, mediante una definizione formale di esso, si apre un nuovo orizzonte con nuovi sbocchi di creatività, e con l'affacciarsi – a loro volta – di nuovi limiti.
Infine, è arrivato Gödel con i suoi teoremi di incompletezza (1931) ad indicare che un analogo processo – su di un livello ancora più generale – è insito in ogni

8) Cf. B. Smith – A. Varzi, *The Formal Ontology of Boundaries*, EJAP, Philosophy Department, Indiana University (ed. Digitale: http://www.phil.indiana,edu/ejap/1997.spring/smithvarzi976.html); cf. anche R. Casati – A. Varzi, *Parts and Places*, MIT Press, Cambridge Massachusetts, pp. 71-97.
9) S. Weil, *Cahiers*, III, Paris 1972, p. 218.

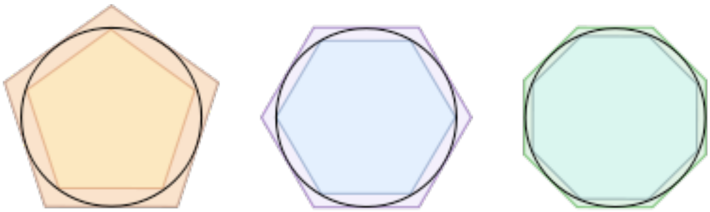
tentativo di progredire nella conoscenza, basato sui metodi della logica. Questi teoremi danno una prova formale del limite inerente in ogni sistema non primitivo di pensiero deduttivo. In altre parole, dato un qualsiasi sistema chiuso di assiomi sufficientemente completo, per quanto ci si sforzi, sempre ci saranno in esso delle verità che si potranno pure riconoscere come verità (dal di fuori), ma che non si potranno confermare (dal di dentro). In essenza, la limitazione posta da Gödel obbliga ad accettare l'insufficienza in ogni sistema di assiomi, o a superarla passando ad un sistema più ampio. Ciò che Leibniz aveva a suo modo annunciato, Gödel dimostrò: non si può mai "incapsulare" la verità, ma solo avanzare alla sua conquista, in una strada senza fine, dove ogni nuovo passo ingloba tutti quelli precedenti e li trascende.

figura 1



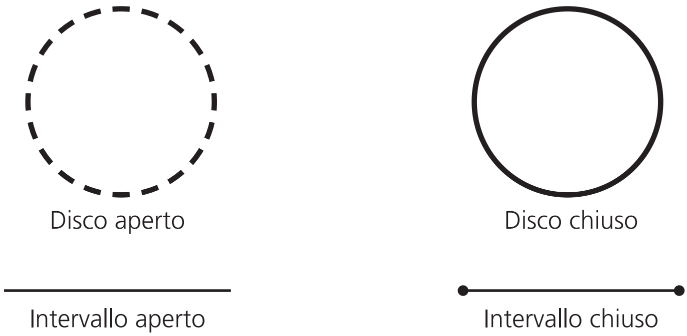
Rappresentazione grafica di un'approssimazione dell'area sotto una curva tramite strisce rettangolari

figura 2



L'area del cerchio è determinata costruendo una successione di poligoni che assomigliano sempre di più al cerchio. Ad esempio, una successione di poligoni regolari con numero crescente di lati: in figura, un pentagono, un esagono e un ottagono. A seconda che si scelgano poligoni iscritti o circoscritti nella circonferenza, l'area di questa risulterà essere approssimata inferiormente o superiormente. Entrambe le scelte portano comunque al limite all'area del cerchio [figura e didascalia tratte da Wikipedia: "metodo di esaustione" (13.04.11)].

figura 3



JUDITH POVILUS
Professore stabile di Logica e fondamenti di matematica presso l'Istituto Universitario Sophia
judith.povilus@iu-sophia.org